数理解析研究所講究録
459巻 1982年 1-9

均質CR多様体のLevi条件と自然なfibration
(若干の例と問題)

岐阜大 教育　竹内 茂

§0. 多変数函数論の一変数函数論との違いは色々あるだろうが、その一つとして函数の定義域が高次元であることよりくる位相的、幾何学的性質の複雑さに起因する諸問題がある。一方同じ多変数でも代数性と解析性という比較をした場合(多様体に限定した場合) SerreのGAGAやChowの結果にみられる様に(射影的でないコンパクト複素多様体も"多"いが)非コンパクト多様体に限定する方が大域的な函数論の立場からは興味がある様に思われる。

複素解析的等質空間の研究には色々な要素が絡んでいて、函数論固有の研究対象とは言えないかもしれないが、位相的幾何学的制約を強く課せられたそれらの対象の研究の手掛りも多く、他の分野(偏微分方程式論等)への応用も期待される。特に高次コホモロジー群の消滅定理等が偏微分方程式論において有効かどうか興味がある。(非スタインの場合)

§1. Preliminary results

ここで複素均質多様体とは複素リー群 G が複素解析的かつ推移的に作用する(連結)複素多様体 M のことゝする。このとき M の一点 o に於ける isotopy subgroup H によって $M=G/H$ と表わすことができる。さて一般にこのような M の多様体としての構造及び解析的性質がどうなっているかは、今までに色々な条件つきで調べられている。紙数の関係もあるのでそのうち著者が知る限りで重要だと思うものを思いつくまゝ並べてみると以下の様になる。定義、証明等の詳細は[ ]内の文献を見られたい。

(1) Algebraic Category

定理1([11]) G:線型代数群, H をその部分代数群とするとき
G/H が射影的 $\Longleftrightarrow$ H が parabolic subgroup (i.e. Borel 部分群を含む)

定理2([10]) 上と同じ G, H に対し、H° nilpotent 或いは、
$\mathrm{Hom}(H^\circ, \mathbb{C}^*)=\{e\} \Rightarrow G/H$ quasi affine

(2) Compact Category

定理3([13]) G を(連結)複素リー群, H をその閉複素部分群とするとき, G/H が compact ならば H° の G における正規化群 $N:=N_G(H^\circ)$ は parabolic で従って $N/H \longrightarrow G/H \longrightarrow G/N$ なる自然な fibration においてファイバーは complex parallelizable, 底空間は rational になる。

定理4（[1]）　上と同じ G, H に対し $\alpha : M = G/H \longrightarrow \alpha(M)$ をアルバネーゼ写像とすれば、α は全射でそのファイバーはコンパクト複素等質多様体となるファイバーバンドルが得られる。

定理5（[1]）上の定理で特に M が Kähler ならば $M = T \times Q$
(T: complex torus, Q: projective rational) と直積に分解する。

定理6（[3]）　G/H projective algebraic $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}\dim(G/H) = \dim_{\mathbb{C}}(G/H)$

(3) Stein Category

G の極大コンパクト部分群 K を H^0 の極大コンパクト部分群 L を含むようにとる。K^C を K の張る複素部分群（閉になる）L^C を L の張る（H の）複素部分群とする。以下簡単のため H は連結（$\therefore$ $H = H^0$）と仮定する。

定理7（[7]）　$G = K^C$ Stein, 　G/H Stein $\Leftrightarrow$ $H = L^C$

定理8（[12]）　$K^C H = H K^C$ ならば　G/H Stein $\Leftrightarrow$ $K^C \cap H = L^C$ 　$(\exists K \supseteq L)$

(4) Intermediate category

定理9（[8]）　G を任意の連結複素リー群とする。$\mathcal{O}(G) := \{f ;\ f : G \to \mathbb{C}$ 正則函数$\}$ に対して $G_0 := \{x \in G \mid f(x) = f(e),\ \forall f \in \mathcal{O}(G)\}$ は G/G_0 が Stein になる最小の閉複素部分群で更に G_0 は G の中心に含まれ $\mathcal{O}(G_0) = \mathbb{C}$，従って $\mathcal{O}(G/G_0) \cong \mathcal{O}(G)$ となる。

定理10（[12]）　$H = L^C$ のとき　$\pi : T_e(G) \longrightarrow T_e(G/H)$　（接空間の写像）に対して $\mathrm{cd}(G/H) = \dim_{\mathbb{C}} \pi T_e(K) \cap \sqrt{-1}\,\pi T_e(K)$ が成立。但し cd は連接層係数の cohomological dimension を表わす。

その他(x)に属するものとして1972年に始るHuckleberry らの一連の研究があるが文献は[6]を参照されたい。これらの仕事は松島，森本の一連の仕事及びBorel-Remmert [1]を一般化する事が主な目的となっているが，思想的にはRemmert らの研究の流れの上にあり，それ迄に得られた多変数函数論の諸結果を等質空間の問題に適用してその構造を解明する事に主眼があるといえる。丁度それはリー環(群)論と代数幾何学が結合して代数群の理論が展開されているのと似ているが，複素等質空間の場合代数的理論だけでなく超越的，位相的方法が必要になって来て問題を複雑にしている。(特に非コンパクトの場合そうである。)

§2. Levi "fibration"

$M=G/H$ に於いて K の軌道を考える。以下 $H\approx\mathbb{C}^{\alpha}$ (多様体として)と仮定する。$o=eH\in M$ として $x=go\in M$ ${}^{\exists}g\in G$ とすると，x に於ける G の isotropy subgroup: $G_x=gHg^{-1}$ (但し $H=G_o$) o の K-軌道: $K(o)=\{ko \mid k\in K\}\cong K/K\cap H=K$ ($\because K\cap H=\{e\}$) 同様に，$K(x)\approx K/K\cap G_x=K$ ($\because G_x\approx G_o$ contractible)。従って K は M 上自由に作用し各軌道は全て diffeo である。

定義: $M=G/H$ の部分多様体が均質CR多様体とは，G の適当な(実)部分群の軌道になっているものをいう。(一般には not closed)

従って上の K 軌道は全てコンパクト均質CR多様体である。

命題: 均質CR多様体は[X]のいみでCR部分多様体である。

証明: $Y := S/S\cap H \hookrightarrow M = G/H$　S: Gの部分群, $p\in Y$ として $(Y=S(o))$

$\dim T_p(Y)\cap JT_p(Y) = \text{const.}$ on Y をいえばよい。但し J: Mの概複素構造。

$p=go$ ${}^\exists g\in S$ とすれば $T_pY\cap JT_pY = gT_oY \cap J(gT_{g^{-1}(p)}Y) = gT_oY\cap gJT_oY = g(T_oY\cap JT_oY)$

$\because)$ $L_g: \underset{o}{Y} \xrightarrow{\cong} \underset{go}{Y}$ より $L_g: T_oY\cong T_{go}Y$　又 L_g と J は可換.　q.e.d.

問題1. ${}^\forall K$軌道はCR同型か (但し Gの元で移りうることを意味しない)。

例1. $G=SL(2,\mathbb{C})\supset H=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\ *&1\end{pmatrix}\right\}\simeq\mathbb{C}$, $K=SU(2,\mathbb{C})\simeq S^3$ とすると

${}^\forall K$-軌道 ($M=\mathbb{C}^2-\{0\}=G/H$ の中の) は原点中心の3次元球面で全て互いに $\mathbb{C}^2-\{0\}$ のスカラー変換で移り合うが (従ってCR同型だが) Gの元では移り合わない。

以下 $G=K^{\mathbb{C}}$: Stein に限定。(∴ アフィン代数群)

定義. $M=G/H$ の K に関する (極大) Levi Null space N とは $T(M)$ の J-不変 integrable sub-bundle で各点における極大積分多様体が K-軌道に含まれるもの (で極大なもの) をいう。

例2. $G=K^{\mathbb{C}}\supset H$ ユニポテント部分代数群 ならば $M=G/H\hookrightarrow {}^\exists\mathbb{C}^n$ quasi affine 故 $N=\{0\}$。

$\because)$ Nの積分多様体は Hの代数的コンパクト複素多様体 $\subset\mathbb{C}^n$ ∴一点

例3. $K(x)\hookrightarrow M$ 強擬凸超曲面 (e.g. $K=S^{2n-1}\hookrightarrow\mathbb{C}^n-\{0\}$ など)

$\Rightarrow N=\{0\}$. ($\because$ Kは複素部分多様体を含まない)

例4. $G=\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*\supsetneq H=\{(e^z, e^{\alpha z})\,|\,z\in\mathbb{C}\}\simeq\mathbb{C}$　$(\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q})$

$\Rightarrow N = T(M)$ （注意：H: not algebraic），$M = \mathbb{C}T^1$ (complex torus)

問題2. N の各 leaf は等質複素多様体か？ 特に次の意味で M の自然な fibration の fibre になっているか？ 即ち $\mathcal{O}(M)$ による M の等化空間 $B = M/N$ は G の等質空間となり G の適当な部分群 J をとれば $B = G/J$ と表わされ fibre $F = J/H$ となるが N の各 leaf $\cong F$ となるかということ。但し一般に各 leaf は closed とは限らないので少くともそのような場合は除外する条件が必要である。($J = \{g \in G / f(g) = f(e),\ {}^{\forall} f \in \mathcal{O}(G/H)\}$ にとればよい。cf. [2])

標題の Levi 条件の説明をしておこう。[5] に従って $K(x) \hookrightarrow M$ の Levi form を第2基本形式

$$L : \tilde{T}(K) \times \tilde{T}(K) \longrightarrow T(M)/T(K)$$
$$(X, Y) \longmapsto \pi(J[JX, Y])$$

で定義する。但し $\pi : T(M) \longrightarrow T(M)/T(K)$ を natural projection とする。又 $\tilde{T}(K) := T(K) \cap JT(K)$ とおく。このとき $L/N \equiv 0$ は明らかである。その意味で N を (maximal) Levi Null space と呼んだわけである。Levi 条件とは K−軌道，従って M の N による foliation が Levi form の Nullity によって決定される事を標語的に述べたものである。問題2が解決しない限り N による foliation は真の意味では fibration と呼べないがそれを Levi "fibration" と呼ぶのは差し支えないであろう。

例5. $L \equiv 0 \Rightarrow N = \tilde{T}(K)$

例6. L non degenerate (e.g. $K \hookrightarrow M$ contact hypersurface) $\Rightarrow N = \{0\}$

§3. Concluding Remarks

最後に複素リー群の等質空間全体の構造を明らかにするために上記の様な問題を考えることの意味について述べておこう。

連結複素リー群 G は松島[7]によって $G = K^c \times \mathbb{C}^\alpha$ と多様体としての直積に分解される(松島分解と呼ぼう)。一方 $M = G/H$ なる G の等質空間に対して H° を H の単位元の連結成分としたとき $\tilde{M} := G/H^\circ$ は M の covering manifold で等質である。そこで一たび $\tilde{M}$ が明確になればあとは covering の間の関係を調べればよいという意味で最初の問題は連結な isotropy subgroup をもつ場合に帰着される。次に H の極大コンパクト群 L に対して、$H = L^c \times \mathbb{C}^\beta$ と松島分解すれば、$H/L^c = \mathbb{C}^\beta \longrightarrow G/L^c = K^c/L^c \times \mathbb{C}^\alpha \longrightarrow G/H = M$ なる fibration を得る。従って M を G/L^c への"H の作用"に関する"orbit space" $\mathbb{C}^\beta \backslash G/L^c$ と考えることが出来る。一般的に函数論的及び位相的手法でもってこれらの"orbit space"の解析的構造を調べるためにはその最も簡単でかつ non-trivial な case の1つとして $\alpha = 0$, $L = \{e\}$ の場合から始めるのが順序としては自然であろう。それが今我々が問題にして来た case であった。

ここで $G/H = M$ の解析的構造とは何をさすかといえば:

(i) $\mathcal{O}(M)$ はどの程度大きいか(2点を分離するか否か, その階数は?).

(ii) 正則凸性

(iii) Steinでもcompactでもないとき その中間的な性質を解析的連接層係数のcohomological dimensionで表わしたとき，それは組(G, H)のどのような量でもって特徴づけられるか。特に各々の極大コンパクト部分群の複素構造Jに対する関係でどう表わされるか？。

などがあげられよう。今の場合total space, fibreともに(i)(ii)(iii)すべての性質がよくわかっているわけで，それらの情報からbase spaceの(i)～(iii)に関する情報を得ようという訳である。

参考文献

[1] Borel, A., and Remmert, R., " Über Kompakte Homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten," Math. Ann. 145(1962), 429-439.

[2] Gilligan, B., and Huckleberry, A.T., " On non compact complex nilmanifolds," Math.Ann. 238(1978), 39-49.

[3] Grauert, H., and Remmert, R., " Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten," Arch. Math. 13(1962), 498-507.

[4] Greenfield, S.J.," Cauchy-Riemann equations in several variables," Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa 22(1968), 275-314.

[5] Hermann, R.," Convexity and pseudoconvexity for cmplex manifolds," J. Math. & Mech. 13(1964), 667-672.

[6] Huckleberry, A., and Snow, D.," Pseudoconcave homogeneous manifolds," Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa IV-7 (1980), 29-54.

[7] Matsushima, Y.," Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes," Nagoya Math. J. 16(1960), 205-218, II, 18(1961), 153-164.

[8] Morimoto, A.," Non compact complex Lie groups without non constant holomorphic functions," Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis (1965), 257-272

[9] Rea, C.," Levi-flat submanifolds and holomorphic extension of foliations," Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa 26(1972), 665-681.

[10] Rosenlicht, M.," On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces," Trans. A.M.S. 101(1961), 211-223.

[11] Steinberg, R.," Conjugacy classes in algebraic groups," Lect. Notes in Math. 366(1974), Springer.

[12] Takeuchi, S.," Cohomological dimension of homogeneous spaces of complex Lie groups, I, II, " Publ.RIMS, Kyoto Univ.12(1976), 255-257; Sci. Rep.Fac. Educ., Gifu Univ. 7(3) (1979), 391-393.

[13] Tits, J.," Espaces homogenes complexes compacts," Comment. Math. Helvet. 37(1962), 111-120.